

# Modulo elastico statico e dinamico del calcestruzzo

*Prof. Gianna Agrò, DSSM "S. Vianelli" Università degli Studi di Palermo*

*Dott. Ing. Elio Lo Giudice, DISMAT Srl*

*Dott. Ing. Giuseppe Navarra, DISMAT Srl*

## SOMMARIO

Nel presente lavoro si è investigato sulle relazioni tra modulo elastico statico convenzionale  $E_s$  e modulo elastico dinamico  $E_d$  sulla base dei risultati di prove sperimentali condotte su provini di calcestruzzo aventi resistenza cilindrica media  $f_{cm} = 42$  MPa. In particolare sono state prese in considerazione le relazioni tra il modulo elastico dinamico e il modulo elastico statico in varie condizioni di carico e scarico, con lo scopo di giustificare alcune scelte operate in sede di definizione di procedure atte alla determinazione del modulo elastico statico.

## 1. INTRODUZIONE

In un precedente lavoro [1] si era svolta una indagine riguardante la possibilità di stabilire un legame funzionale tra il modulo elastico dinamico  $E_d$  e il modulo elastico statico  $E_s$ , per soddisfare esigenze di ordine pratico ed economico. Si trattava di un lavoro di verifica in quanto, nella ricerca del legame, era stata utilizzata, ai fini della determinazione del modulo elastico statico, la proposta di norma redatta dal gruppo italiano Unicemento Metodi di Prova [2], a confronto con i numerosi studi sull'argomento.

In questo lavoro, sulla base della stessa procedura standard, si vuole indagare sui legami esistenti tra il modulo  $E_s$ , valutato in ognuno dei vari cicli sia in fase di carico sia di scarico, ed il modulo  $E_d$  valutato prima e dopo aver sottoposto il provino alla procedura. Il piano sperimentale predisposto, tuttora in fase di attuazione, prevede una indagine su tre classi resistenza:

Classe	Range di tensione (MPa)
Bassa	$200 \leq f_{cm} \leq 300$
Media	$350 \leq f_{cm} \leq 500$
Alta	$550 \leq f_{cm} \leq 700$

Nel presente si presentano i primi risultati delle indagini sperimentali condotte su cilindri in calcestruzzo  $\varnothing 150 \times 300$  mm aventi resistenza cilindrica media  $f_{cm} = 42$  MPa.

Nella determinazione sperimentale il modulo elastico statico  $E_s$  è calcolato dalla misura della deformazione in risposta ad una tensione applicata di intensità nota.

Purtroppo, la dipendenza della deformazione istantanea dalla velocità del caricamento rende difficoltosa la distinzione fra deformazioni elastiche e viscosi. Ai fini pratici la deformazione che si verifica durante il caricamento è considerata elastica e l'incremento di deformazione che si verifica sotto carico è considerato deformazione viscosa [4]. Il modulo di elasticità valutato secondo tale considerazione è detto modulo elastico secante, perché determinato fra due punti della curva s-e del calcestruzzo in un *range* considerato elastico, o anche modulo elastico statico perché ottenuto con gradiente di carico controllato.

Il modulo dinamico è più semplice da determinare sperimentalmente ed è ricavato con un caricamento di tipo impulsivo: si applica al provino una tensione non significativa e nessuna microfessurazione viene indotta nel calcestruzzo durante la prova quindi, poiché la viscosità non si manifesta, il modulo dinamico si riferisce quasi esclusivamente ad effetti puramente elastici [4]. Per questa ragione il modulo dinamico è considerato approssimativamente uguale al modulo tangente iniziale alla curva s-e determinata da una prova statica [5,6] ed è più alto del modulo secante.

Purtroppo, il rapporto fra modulo di elasticità statico e dinamico non si mantiene costante, ma si incrementa con l'età e la resistenza del calcestruzzo [4]. Dalla variabilità di tale rapporto deriva la difficoltà di ottenere il modulo  $E_s$  la cui conoscenza è indispensabile nella progettazione strutturale, da una semplice conversione del valore del modulo  $E_d$ .

## 2. SPERIMENTAZIONE

### 2.1. Generalità

Vengono testati 45 provini di calcestruzzo con resistenza cilindrica media pari a  $f_{cm} = 42$  MPa; da ciascun provino di calcestruzzo sono state acquisite prima la frequenza di risonanza estensionale per la determinazione del modulo  $E_d$ , poi le deformazioni derivanti dai cicli di carico-scarico per la determinazione del modulo  $E_s$  e infine, a procedura conclusa, è stato valutato nuovamente il modulo elastico dinamico.

### 2.2. La valutazione del modulo $E_d$

I valori del modulo  $E_d$  sono determinati tramite la procedura descritta in UNI 9771 [8] ovvero attraverso la vibrazione del provino, applicando una tensione trascurabile.

La frequenza di risonanza estensionale per il calcolo di  $E_d$  è acquisita con accelerometro PCB 353B31 o PCB 352B, rigidamente fissato su una base del provino posto orizzontalmente su un supporto in gomma. Infine il modulo  $E_d$ , espresso in Pa, è ricavato tramite la seguente relazione:

$$E_d = 4 \cdot h^2 \cdot f_e^2 \cdot \rho \cdot C_1$$

in cui  $f_e$  è la frequenza di risonanza estensionale espressa in hertz,  $h$  l'altezza del provino in metri,  $\rho$  la massa volumica in  $\text{kg/m}^3$  e  $C_1$  un fattore di correzione pari a:

$$C_1 = 1 + \frac{\pi^2 \cdot \nu^2 \cdot J}{A \cdot h^2}$$

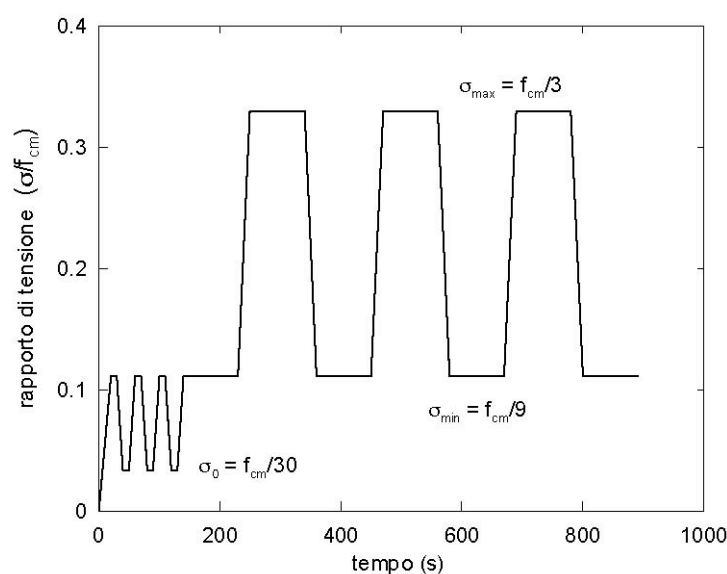
con  $\nu$  rapporto di Poisson,  $A$  e  $J$  rispettivamente area e momento di inerzia della sezione trasversale del provino.

### 2.3 La valutazione del modulo $E_s$

Per la determinazione di  $E_s$  è stata utilizzata la macchina universale da 600 kN [7]; gli incrementi di carico sono stati rilevati tramite una cella di carico ausiliaria da 300 kN appositamente montata in corrispondenza dello snodo sferico; gli incrementi di deformazione fra  $\sigma_{\min}$  e  $\sigma_{\max}$  sono stati rilevati con 3 estensimetri elettrici a resistenza posizionati a  $120^\circ$ .

I valori del modulo  $E_s$  sono stati ottenuti con la procedura proposta dalla Commissione UNICEMENTO al CEN [2] che si propone di sostituire la norma internazionale ISO 6784 [3]. Rispetto alle norme attualmente in vigore in Europa, la proposta di norma prevede: cicli di controllo a carichi più bassi, una tensione minima di prova più alta, il calcolo del modulo in corrispondenza del III ciclo di prova.

La procedura di carico della proposta di norma è riportata in Figura 1.



**Figura 1.** Storia di carico imposta secondo la proposta di norma europea [2]

Ai fini del presente studio, tuttavia, il modulo  $E_s$  è calcolato come rapporto fra gli incrementi di tensione e deformazione sia in fase di carico che di scarico registrati in corrispondenza di ciascun ciclo, ottenendo quattro diversi gruppi di valori per:

1.  $f_{cm} = 42$  MPa ed  $E_s$  valutato in fase di carico;
2.  $f_{cm} = 42$  MPa ed  $E_s$  valutato in fase di scarico.

### 3. ANALISI STATISTICA DEI DATI SPERIMENTALI

I dati da sottoporre ad analisi statistica sono le coppie di misurazioni del modulo elastico dinamico e statico ( $E_d, E_s$ ) effettuate su  $n=45$  provini di calcestruzzo aventi resistenza cilindrica media  $f_{cm} = 42$  MPa; lo scopo è validare l'ipotesi che la correlazione tra  $E_d$  ed  $E_s$  sia maggiore quando  $E_s$  è valutato nella fase di scarico piuttosto che nella fase di carico.

Le rilevazioni del modulo elastico dinamico sono state effettuate in due momenti: prima dell'inizio della prova ( $E_d^p$ ) e alla fine della stessa ( $E_d^d$ ); mentre le misurazioni del modulo elastico statico  $E_s$  sono state effettuate, per ognuno dei 4 cicli previsti dalla sperimentazione, sia al carico  $E_s^{c-i}$   $i=1,..,4$  che allo scarico  $E_s^{sc-i}$  ( $i=1,..,4$ ).

Il coefficiente di correlazione lineare di Pearson è stato calcolato per ogni gruppo di coppie ( $E_d^p, E_s^{c-i}$ ), ( $E_d^p, E_s^{sc-i}$ ), ( $E_d^d, E_s^{c-i}$ ) e ( $E_d^d, E_s^{sc-i}$ ) e i valori dei 16 coefficienti di correlazione ottenuti sono riportati nella tabella 1.

La prima ipotesi da verificare è quella di assenza di correlazione ovvero se la correlazione lineare misurata dal coefficiente  $\rho$  è statisticamente diversa da zero:

$$H_0: \rho = 0 \quad \text{contro l'alternativa} \quad H_1: \rho \neq 0$$

Utilizzando la statistica test:

$$t_{(n-2)} = \frac{\rho\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

che si distribuisce come una  $t$  di Student con  $(n-2) = 43$  gradi di libertà, l'ipotesi  $H_0$  viene rifiutata con un livello di significatività  $\alpha = 1\%$  per ogni coefficiente di correlazione riportato in tabella 1 tranne per i due, segnati con asterisco, riguardanti la correlazione tra  $E_d$  ed  $E_s^{c-i}$ ; per questi ultimi si accetta l'ipotesi di assenza di correlazione.

**Tabella 1.** Coefficienti di correlazione lineare  $\rho$ ,  $n=45$  coppie ( $E_d, E_s$ )

	$E_s^{c-1}$	$E_s^{c-2}$	$E_s^{c-3}$	$E_s^{c-4}$	$E_s^{sc-1}$	$E_s^{sc-2}$	$E_s^{sc-3}$	$E_s^{sc-4}$
$E_d^p$	-0,164*	0,4044	0,4256	0,4217	0,6136	0,6866	0,6375	0,6267
$E_d^d$	-0,1036*	0,4374	0,4774	0,4489	0,6391	0,6907	0,6564	0,6306

\* valori non significativamente diversi da zero

Come si osserva in tabella 1 i coefficienti di correlazione tra  $E_d$  ed  $E_s$  allo scarico sono più alti rispetto a quelli tra  $E_d$  ed  $E_s$  al carico, sia considerando  $E_d^p$  che  $E_d^d$ , e per saggiare se tale differenza è significativamente diversa da zero si formula l'ipotesi

$$H_0: \rho_{12} - \rho_{13} = 0 \quad \text{contro l'alternativa} \quad H_1: \rho_{12} - \rho_{13} \neq 0$$

dove il pedice 1 indica la prima variabile  $E_d^p$  o  $E_d^d$ , il pedice 2 indica la variabile  $E_s$  al carico di un fissato ciclo mentre il pedice 3 indica la variabile  $E_s$  allo scarico dello stesso ciclo.

In tutto 6 test d'ipotesi  $H_0$  avendo escluso i confronti relativi ai risultati delle correlazioni di  $E_d^p$  con  $E_s^{c-1}$  e di  $E_d^d$  con  $E_s^{c-1}$  poiché giudicate non significativamente diverse da zero.

Il confronto tra coefficienti di correlazione riguarda, nel caso in esame, campioni non indipendenti o, più correttamente, appaiati e la letteratura propone in questi casi il test di William -Steiger [9] che ha distribuzione t di Student con  $n-3 = 42$  gradi di libertà:

$$t_{n-3} = (\rho_{12} - \rho_{13}) \sqrt{\frac{(n-1)(1+\rho_{23})}{2|R|(n-1)/(n-3) + (\rho_{12} + \rho_{13})^2(1-\rho_{23})^3 / 4}}$$

dove

$$R = 1 - \rho_{12}^2 - \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2 + 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}$$

indicando con  $\rho_{12}$  e  $\rho_{13}$  i coefficienti di correlazione la cui differenza deve essere testata e con  $\rho_{23}$  il coefficiente di correlazione tra le due variabili  $E_s^{c-i}$  al carico ed  $E_s^{sc-i}$  allo scarico dello stesso ciclo della cui correlazione bisogna tener conto nell'effettuare il test.

I valori della statistica test t risultano tutti molto alti ( $t > 6$ ) quindi l'ipotesi  $H_0$  viene rifiutata con fiducia superiore al 0.1% potendo concludere che la correlazione tra  $E_d$  ed  $E_s$  allo scarico è statisticamente maggiore rispetto a quella tra  $E_d$  ed  $E_s$  al carico, sia considerando  $E_d^p$  che  $E_d^d$ .

#### 4. CONCLUSIONI

Le indagini condotte unitamente alle analisi statistiche effettuate consentono di formulare le seguenti considerazioni:

- la correlazione tra  $E_d$  ed  $E_s$  al primo ciclo è statisticamente non significativa, confermando l'opportunità, per altro prevista da gran parte delle norme, di effettuare dei cicli di assestamento prima di eseguire le misure inerenti la determinazione del modulo elastico secante;
- la correlazione tra  $E_d$  ed  $E_s$  è statisticamente maggiore se determinata in fase di scarico, ciò trova conferma sotto l'aspetto fisico in quanto la quota di deformazione restituita è quella elastica;
- la correlazione tra  $E_d$  ed  $E_s$  valutando il modulo elastico dinamico a fine prova statica non è diversa da quella valutata considerando il modulo elastico dinamico misurato prima della prova, confermando, da un lato, che la sollecitazione ciclica di prova non induce danneggiamenti sul materiale e dall'altro che i livelli tensionali di servizio fanno rimanere la struttura in campo elastico.

#### BIBLIOGRAFIA

1. G. Agrò, E. Lo Giudice, M.M. Sacco - "Il modulo elastico statico e dinamico del calcestruzzo", Conferenza AIPnD 2009.
2. S. Cangiano, R. Cucitore, R. Felicetti, E. Lo Giudice, A. Morotti, A. Princigallo, M. Sacco - "Sulla determinazione sperimentale del modulo di elasticità secante del calcestruzzo", Convegno A.I.C.A.P., Pisa, 2009.

3. ISO 6784 – International Standard – Concrete – Determination of static modulus of elasticity in compression, 1982.
4. A. M. Neville, (4th Ed.) – Properties of Concrete. Pearson Prentice Hall.
5. V. Hermann et al. – “The dynamic modulus of elasticity as an equivalent for the initial tangent modulus at static testing”, RILEM, Proceedings of International Symposium on New Developments in Non-Destructive Testing o Non-Metallic Materials, Contanta (Romania), 1974.
6. Bollettino Ufficiale CNR N.195 – (2000) – Norme Tecniche – parte IV.
7. E. Lo Giudice, L. Corchia, M.M. Sacco – “Sull’utilizzo delle macchine di prova a compressione per calcestruzzi”, Convegno A.I.C.A.P., Pisa, 2009.
8. UNI 9771 – Calcestruzzo indurito. Determinazione della frequenza fondamentale di risonanza flessionale, estensionale e torsionale.
9. Steiger J.H. “Tests for comparing elements of a correlation matrix” Psychological.

---

La presente memoria è tratta dagli **Atti del 14° Congresso AIPnD**.  
Si ringraziano gli autori per la gentile autorizzazione alla pubblicazione.

---

**Gianna Agrò**

*DSSM “S. Vianelli” Università degli Studi di Palermo, Viale delle Scienze Ed.13,  
T. 0916626229 - agro@unipa.it*

**Elio Lo Giudice, Giuseppe Navarra**

*DISMAT s.r.l., C.da Andolina, S.S. 122 – km 28 – 92024 Canicattì (AG),  
T. 0922 859406 - eliogiudice@dismat.it - giuseppenavarra@dismat.it*